

RALLYE MATHÉMATIQUE DE FRANCHE-COMTÉ
Éléments de solution de l'épreuve de qualification 2012

Les classes de Troisième doivent résoudre les problèmes 1 à 6.

Les classes de Seconde doivent résoudre les problèmes 4 à 9.

La classe doit rendre une seule réponse par problème traité **en expliquant la démarche**.

Dans ces éléments de solution, nous proposons, pour chaque problème, au moins une réponse dont la démarche est accessible aux élèves.

1 Les bougies

1.1 Le sujet

Maman Gripsou a acheté dix bougies « chiffres ». Comme elle est économe, elle a décidé d'utiliser chaque bougie plusieurs fois. Ainsi, à chaque anniversaire, on souffle les bougies du gâteau le plus vite possible afin qu'elles ne raccourcissent pas trop. Maman Gripsou a constaté que chaque bougie ne s'usait que d'un millimètre par anniversaire. Grâce à cet achat, elle a pu fêter trois fois l'anniversaire de son mari, trois fois celui de leur fils unique et trois fois le sien.

La bougie « 3 », la plus usée, a perdu 7 mm.

La « 1 » et la « 5 » ont diminué de 3 mm.

La « 4 » et la « 6 » sont plus courtes de 2 mm et la « 7 » de 1 mm.

Quant aux autres, elles sont encore neuves.

Le prochain anniversaire est celui de son fils et elle n'utilisera pas de nouvelle bougie.

Quelle(s) bougie(s) utilisera-t-elle ?
Expliquez votre démarche.



1.2 Analyse a priori

Cet exercice ne nécessite aucune connaissance mathématique particulière.

Il développe les notions courantes de logique et de déduction. Les élèves devraient s'approprier rapidement cet exercice de comptage assez ludique.

Ils devront déterminer les anniversaires passés (dizaines, unités) à l'aide des informations données sur les bougies déjà utilisées.

Ensuite, en respectant la logique des âges entre parents et enfant, ils trouveront les deux bougies qui seront utilisées et ainsi l'âge du fils.

1.3 Éléments de solution

Listons les bougies « chiffres » et indiquons le nombre de fois où elles ont été utilisées :

Bougie	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'utilisations	0	3	0	7	2	3	2	1	0	0

Chaque anniversaire a déjà été fêté 3 fois et 18 bougies ont été utilisées, donc chaque membre de la famille a un âge à 2 chiffres.

Le « 9 » n'ayant pas été utilisé, aucun d'eux n'a changé de décennie et n'en changera.

Le « 3 » ayant été utilisé 7 fois, les parents ont la trentaine.

Le « 1 » ayant été utilisé 3 fois, le fils a nécessairement un âge commençant par 1 (sinon les parents auraient eu 31 ans, ce qui n'est pas possible puisque ni le « 0 » ni le « 2 » n'ont été utilisés).

Avec les bougies restantes à répartir, il nous reste deux possibilités :

1^{er} cas :

	Parents		Fils
	34 ans	35 ans	13 ans
	35 ans	36 ans	14 ans
	36 ans	37 ans	15 ans

2^e cas :

	Parents		Fils
	34 ans	33 ans	15 ans
	35 ans	34 ans	16 ans
	36 ans	35 ans	17 ans

Il faut éliminer le 2^e cas : le fils n'aura pas 18 ans puisqu'on n'utilisera que des bougies déjà utilisées et de plus il n'y a qu'une seule bougie « 3 ».

Le fils aura donc 16 ans et Maman Gripsou utilisera le « 1 » et le « 6 ».

2 Le marché péruvien

2.1 Le sujet

Au Pérou, dans les années 1980, la crise économique avait provoqué une hyperinflation (hausse très rapide des prix).

Une des conséquences fut le retour du troc dans certaines régions rurales du pays.

Manuel produit du maïs qu'il stocke dans des sacs de jute de 20 kg. Pour le prochain mariage de sa fille Mafalda, il souhaite acquérir huit poulets, trois chevreaux et deux porcelets.

Au marché de la ville voisine, trois poulets s'échangent contre 20 kg de maïs, trois chevreaux s'échangent contre cinq poulets et 19 kg de maïs. Enfin, il faut deux chevreaux et deux poulets pour obtenir un porcelet.

Quel nombre minimal de sacs de maïs Manuel devra-t-il emmener au marché ? Expliquez votre démarche.

2.2 Analyse a priori

En début de troisième, un élève a les outils permettant de résoudre ce petit problème.

Cet exercice mobilise quelques connaissances sur la notion de proportionnalité et de fraction ou éventuellement les bases d'algèbre..

Une approximation par excès sera nécessaire pour donner la conclusion.

2.3 Éléments de solution

2.3.1 Solution 1

Si 3 poulets s'échangent contre 20 kg de maïs, un poulet s'échange contre $\frac{20}{3}$ kg de maïs et 8 poulets s'échangeront contre $\frac{160}{3}$ kg de maïs.

3 chevreaux s'échangent contre cinq poulets et 19 kg de maïs, donc équivalent à $\frac{100}{3} + 19$ kg de maïs et un chevreau s'échangera contre $\frac{1}{3}(\frac{100}{3} + 19)$ soit $\frac{157}{9}$ kg de maïs.

Un porcelet s'échange contre deux chevreaux et deux poulets ;
un porcelet s'échangera contre $2 \times \frac{157}{9} + 2 \times \frac{20}{3}$ soit $\frac{434}{9}$ kg de maïs.

Manuel devra donc échanger $\frac{160}{3} + \frac{100}{3} + 19 + 2 \times \frac{434}{9}$ soit $\frac{260}{3} + \frac{868}{9} + 19$ kg de maïs.

Manuel devra finalement échanger $202 \text{ kg} + \frac{1}{9} \text{ kg}$.

Il faudra donc qu'il prévoit 11 sacs de maïs.

2.3.2 Solution 2

Soient x, y et z les équivalents maïs d'un poulet, d'un chevreau et d'un porcelet respectivement.
Les différents échanges se traduisent par le système :

$$\begin{cases} 3x = 20 \\ 3y = 5x + 19 \\ z = 2x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{20}{3} \\ y = \frac{1}{3}(5x + 19) \\ z = 2x + 2y \end{cases}$$

Manuel doit échanger pour $8x + 3y + 2z$

$$8x + 3y + 2z = 8x + 5x + 19 + \frac{4}{3}(5x + 19) = (17 + \frac{20}{3})x + 19(1 + \frac{4}{3})$$

Comme $x = \frac{20}{3}$, on obtient $8x + 3y + 2z = \frac{71}{3} \times \frac{20}{3} + 19 \times \frac{7}{3} = \frac{1819}{9}$

Manuel devra finalement échanger $202 \text{ kg} + \frac{1}{9} \text{ kg}$.

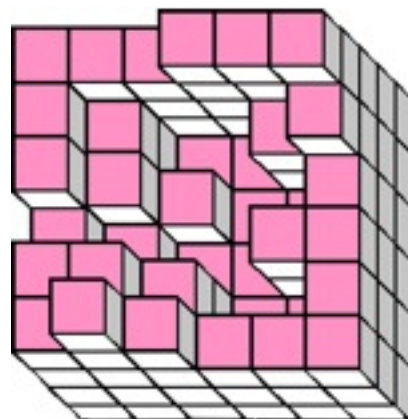
Il faudra donc qu'il prévoit 11 sacs de maïs.

3 Cube incomplet

3.1 Le sujet

Elsa possède dans son jeu des petits cubes de même dimension. Avec ses petits cubes, elle commence à construire un grand cube. Son frère prend une photo du cube en cours de réalisation (photo ci-contre).

Combien de cubes manque-t-il pour reconstituer le «grand» cube ?



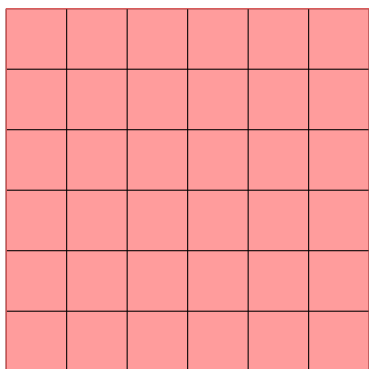
3.2 Analyse a priori

Ce problème classique nécessite d'avoir une bonne vision dans l'espace. Le cube complété comptera $6 \times 6 \times 6 = 36$ petits cubes.

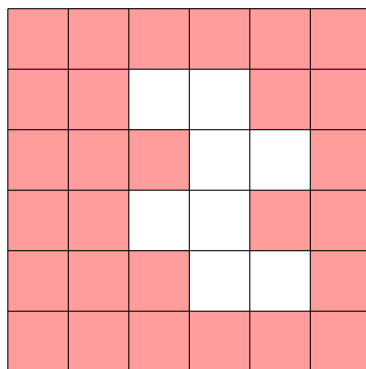
Les élèves devront ensuite s'organiser pour réaliser un comptage soit par «couches» horizontales soit par «tranches» verticales.

3.3 Éléments de solution

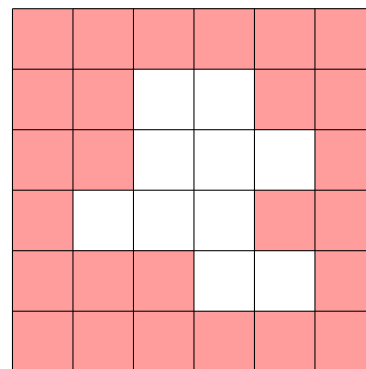
3.3.1 Méthode par «couches»



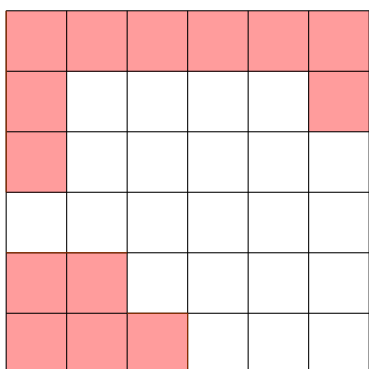
La première couche
est complète.



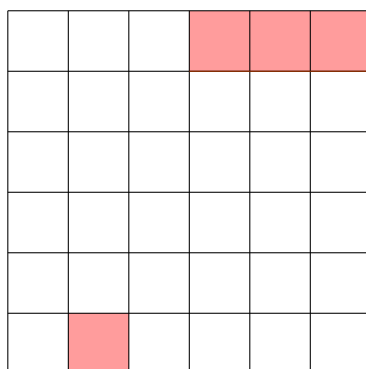
Sur la 2^e couche,
il manque **8** cubes.



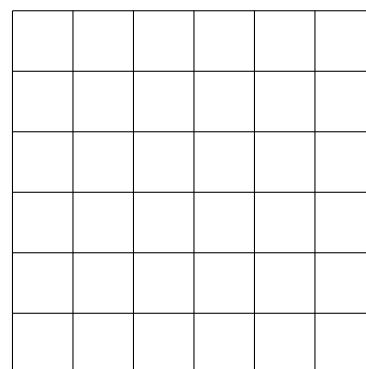
Sur la 3^e couche,
il manque **10** cubes.



Sur la 4^e couche,
il manque **22** cubes.



Sur la 5^e couche,
il manque **32** cubes.



Sur la 6^e couche,
il manque **36** cubes.

$8 + 10 + 22 + 32 + 36 = 108$ Il manque donc **108** cubes pour reconstituer le grand cube.

3.3.2 Méthode par «tranches»

Sur la 1^{re} tranche, il manque **13** cubes.

Sur la 2^e tranche, il manque **15** cubes.

Sur la 3^e tranche, il manque **21** cubes.

Sur la 4^e tranche, il manque **24** cubes.

Sur la 5^e tranche, il manque **20** cubes.

Sur la 6^e tranche, il manque **15** cubes.

$$13 + 15 + 21 + 24 + 20 + 15 = 108$$

Il manque donc **108** cubes pour reconstituer le grand cube.

4 Les carrés

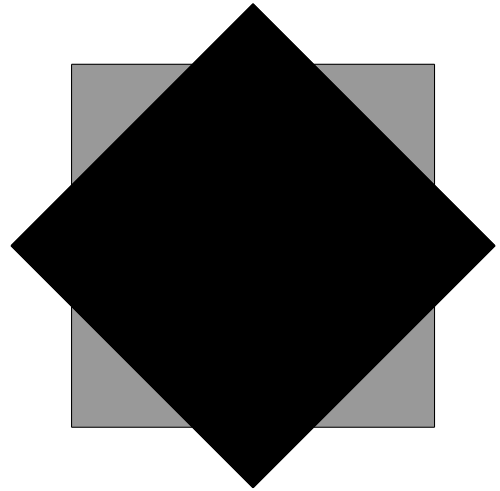
4.1 Le sujet

Le jeu de Charly contient des carrés gris et des carrés noirs.

On peut poser un carré noir sur un carré gris de manière à ce que les côtés du carré noir partagent les côtés du carré gris en trois segments de même longueur.

**Un des carrés est-il plus grand que l'autre ?
Si oui, quel est le rapport entre les deux aires de ces carrés ?**

Expliquez votre démarche.



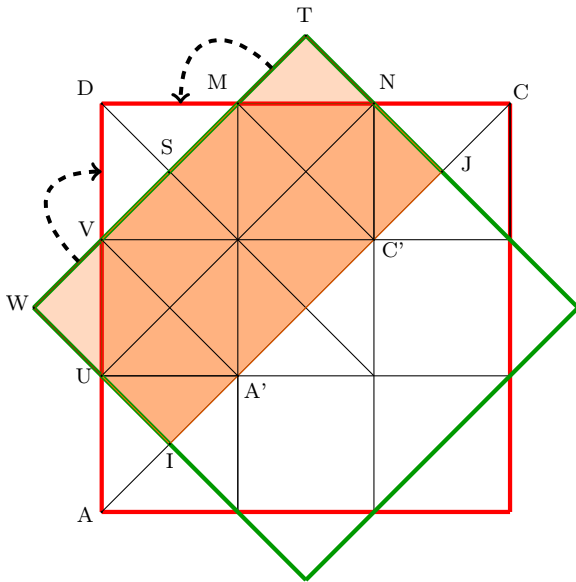
4.2 Analyse a priori

Énoncé simple de compréhension qui permet la mise en oeuvre de différentes stratégies.
Une première idée est de mesurer ou de refaire un dessin.

La première solution proposée utilise un pavage, la seconde les aires des carrés et des trapèzes, quant à la troisième elle utilise le rapport $\sqrt{2}$ entre la diagonale du carré et son côté et les aires.

4.3 Éléments de solution

4.3.1 Première solution



a. Le tracé :

On trace un carré rouge.

Le côté du carré rouge est partagé en 3 segments de même longueur.

Il est possible de tracer le carré vert.

b. Constitution du pavage

Compte tenu des propriétés géométriques de la configuration,

$$\text{aire (MTN)} = \text{aire (DMS)} = \alpha$$

On en déduit que l'aire du carré vert est égale à deux fois l'aire de (DNJIU).

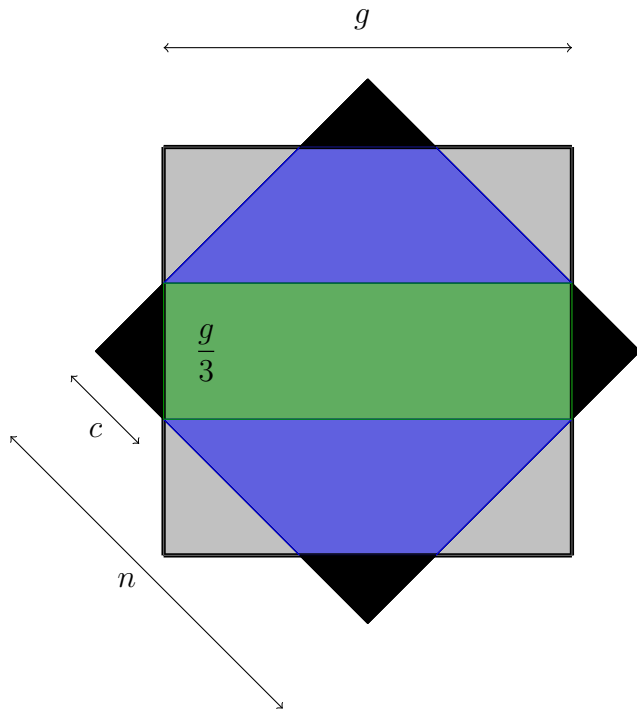
Le domaine orange est inclus dans le domaine ADC.

On peut en déduire que le carré rouge est plus grand que le carré vert.

En comptant, on obtient : Aire (DCA) = 18α et aire (orange) = 16α

Le rapport des aires est $\frac{16}{18}$ soit $\frac{8}{9}$.

4.3.2 Deuxième solution



Soit g la longueur du côté du carré gris, n celle du carré noir et c celle du côté d'un triangle rectangle isocèle.

Les 4 triangles noirs ont une aire totale égale à :
 $4 \times \frac{c^2}{2} = 2c^2 = \frac{g^2}{9}$

L'aire du carré noir est égale à n^2

$$n^2 = 4 \times \frac{c^2}{2} + \frac{g}{3} \times g + 2 \times \frac{\frac{g}{3} + g}{2} \times \frac{g}{3}$$

$$n^2 = 2c^2 + \frac{7g^2}{9}$$

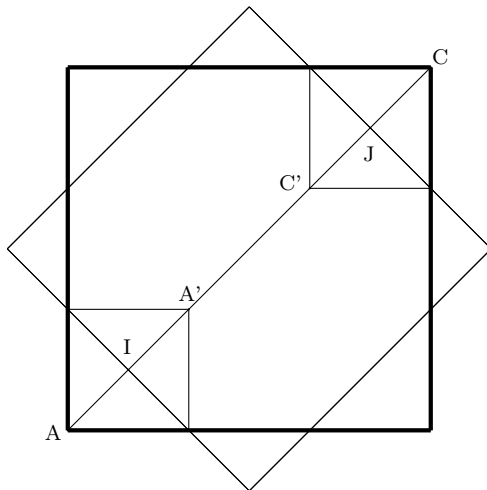
$$n^2 = \frac{8}{9}g^2$$

Le rapport des aires est $\frac{8}{9}$.

4.3.3 Troisième solution

La comparaison des aires peut passer par la comparaison des arêtes.

Nous allons travailler dans un plan où les deux faces carrées des cubes sont représentées ci-dessous.



Notons x et y les longueurs respectives des arêtes des carrés gris et noir.

Nous avons $AC = x\sqrt{2}$ et $IJ = y$.

$[AA']$ est la diagonale d'un carré de centre I et de longueur $\frac{x}{3}$.

On a alors $IA = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{6}x\sqrt{2}$.

Par symétrie, $JC = \frac{1}{6}x\sqrt{2}$

Finalement, $AC = AI + IJ + JC$

d'où $x\sqrt{2} = \frac{1}{6}x\sqrt{2} + y + \frac{1}{6}x\sqrt{2}$

et $y = \frac{2}{3}x\sqrt{2}$.

Comme $\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0,943$, nous concluons que le carré noir est plus petit que le carré gris.

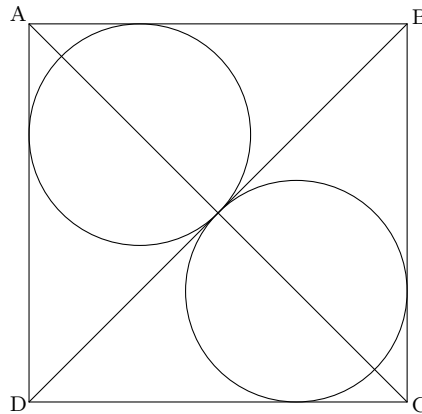
Le rapport des aires est $(\frac{2}{3}\sqrt{2})^2$, soit $\frac{8}{9}$.

5 Cercles tangents

5.1 Le sujet

Dans un carré de 10 cm de côté, on trace deux cercles de même rayon tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.

Calculer le rayon des cercles en expliquant votre démarche.



5.2 Analyse a priori

Analyse d'une configuration décrite et déjà réalisée.

Problème en troisième et en seconde basé sur la prise d'initiative.

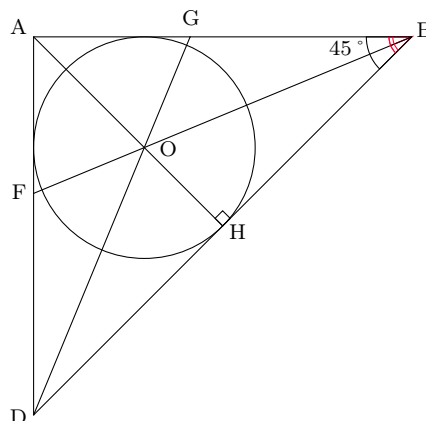
L'idée de penser à faire un dessin peut les mettre sur la voie ou du moins les conduire à dégager certaines propriétés géométriques de la figure : diagonale du carré, cercle inscrit, mesures d'angles, bissectrices, théorème de Pythagore, trigonométrie ...

La réalisation de la figure peut se faire à partir de deux cercles tangents extérieurement et de même rayon.

5.3 Éléments de solution

5.3.1 Première méthode

Les diagonales du carré se coupent au point de contact des deux cercles ; on peut se ramener à un cercle inscrit dans un triangle rectangle.



Le triangle ABD est rectangle isocèle en A.

D'après le théorème de Pythagore : $BD^2 = 10^2 + 10^2$

d'où $BD = 10\sqrt{2}$

L'angle \widehat{ABD} mesure 45° et la droite (BF) est sa bissectrice donc \widehat{OBH} mesure $22,5^\circ$.

Le triangle ABD étant isocèle en A, la bissectrice issue de A est donc la médiatrice de [BD].

Le triangle OBH est rectangle en H, milieu de [BD] donc $BH = 5\sqrt{2}$.

$$\tan \widehat{OBH} = \frac{OH}{BH} \quad \text{donc} \quad \mathbf{OH} = 5\sqrt{2} \times \tan 22,5^\circ \quad \text{On a alors } OH \approx 2,9.$$

Pour aller plus loin.

$$\tan 45 = \frac{2 \tan 22,5}{1 - \tan^2 22,5} \quad \text{donc } 1 = \frac{2 \tan 22,5}{1 - \tan^2 22,5} \quad \text{d'où } 1 - \tan^2 22,5 - 2 \tan 22,5 = 0$$

$$\text{d'où } \tan^2 22,5 + 2 \tan 22,5 - 1 = 0$$

En posant $x = \tan 22,5$, l'expression devient $x^2 + 2x - 1 = 0$.

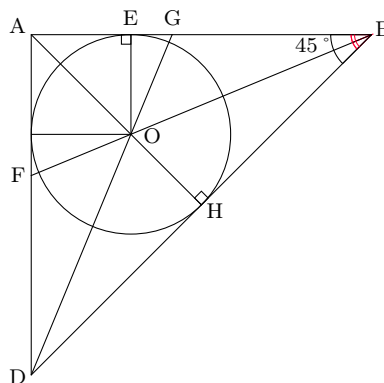
Cette équation deux solutions, une positive et l'autre négative.

La solution positive est :

$$x = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} \quad x = -1 + \sqrt{2} \quad x = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } OH = 5\sqrt{2} \times \tan 22,5^\circ \quad OH = \frac{5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}.$$

5.3.2 Deuxième méthode.



E est le point de tangence du cercle avec (AB). Le carré de côté [AE] et de diagonale [AO] a pour côté r , le rayon cherché.

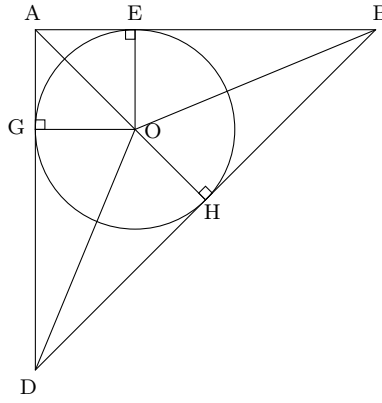
$$AO = r\sqrt{2}.$$

$$AO + OH = AH \text{ et } AH = 5\sqrt{2}. \text{ Donc } r\sqrt{2} + r = 5\sqrt{2}; r(1 + \sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

$$\text{D'où } OH = r \text{ avec } r = \frac{5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

5.3.3 Troisième méthode.

Cette méthode utilise des calculs d'aires : O étant le point d'intersection des trois bissectrices, les rayons [OE], [OG] et [OH] sont respectivement perpendiculaires aux côtés [AB], [AD] et [DB].



- Aire du triangle ABD = $\frac{AB \times AD}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$
- Aire du triangle AOD (ou AOB) = $\frac{AD \times OG}{2} = \frac{10 \times r}{2} = 5r$
- Aire du triangle DOB = $\frac{DB \times OH}{2} = \frac{10\sqrt{2} \times r}{2} = 5\sqrt{2} \times r$

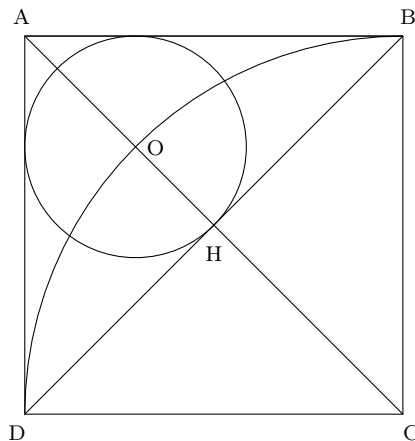
Nous obtenons l'égalité : $5r + 5r + 5r\sqrt{2} = 50$

Soit $r + r + r\sqrt{2} = 10$ ou $r(2 + \sqrt{2}) = 10$

et donc $r = \frac{10}{2 + \sqrt{2}}$

5.3.4 Quatrième méthode.

Un groupe d'élèves de 2^{nde} nous a donné la figure ci-contre, le centre O étant l'intersection de la diagonale et du quart de cercle de centre C et de rayon 10 cm.



À partir de cette figure, on calcule aisément OH :

$$OH = OC - HC = 10 - 5\sqrt{2}$$

Comment prouver que O est bien centre du cercle inscrit ?

Considérons le triangle DCO. Comme $DC = OC$, ce triangle est isocèle en C et l'on peut calculer la mesure de l'angle \widehat{CDO} : $(180^\circ - 45^\circ)/2 = 67,5^\circ$.

Nous en déduisons la mesure de \widehat{HDO} : $67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$.

La demi-droite [DO) partage l'angle \widehat{ADH} en deux angles de même mesure $22,5^\circ$, c'est donc sa bissectrice. [AO) étant une autre bissectrice du triangle ABD, le point O est bien le centre du cercle inscrit.

Remarque : $\frac{5\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 10 - 5\sqrt{2}$ (en multipliant par l'expression conjuguée du dénominateur)

6 Partage

6.1 Le sujet

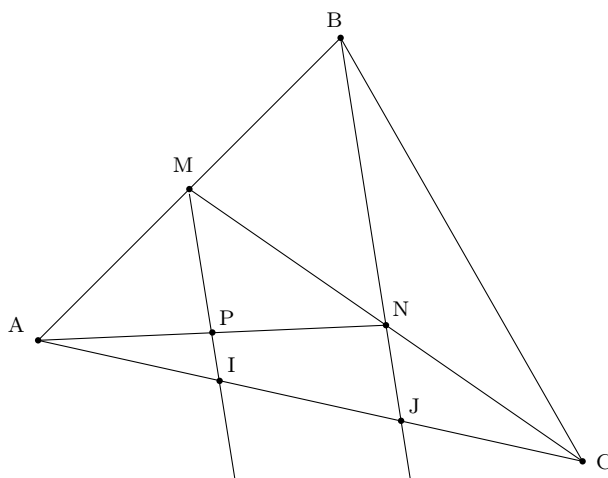
Nathan doit rendre son devoir de mathématiques après-demain et il n'a toujours pas trouvé la solution de l'exercice suivant :

« ABC est un triangle dont le côté [AB] est partagé en quatre segments de même longueur. Donner un programme de construction permettant, sans effectuer de mesure, de partager le côté [AC] en cinq segments de même longueur et réaliser cette construction.»

Il décide alors de chercher des idées sur Internet et trouve sur un forum la construction suivante :

« ABC est un triangle dont le côté [AB] est partagé en deux segments de même longueur. Pour partager le côté [AC] en trois segments de même longueur, il suffit de :

- Nommer M le milieu de [AB].
- Tracer [MC] et construire son milieu N.
- Tracer [AN] et construire son milieu P.
- Les droites (MP) et (BN) coupent [AC] respectivement en I et J.



Les points I et J partagent alors le côté [AC] en trois segments de même longueur.»

Curieux et prudent, Nathan décide de vérifier que la construction proposée est valable et il réussit à démontrer le résultat annoncé. Et comme il n'a pas d'autres pistes, il décide d'adapter cette méthode à son problème. Après quelques essais, il trouve une solution et rédige son programme de construction.

A vous maintenant !

Démontrez le résultat annoncé sur Internet et proposez une réponse au devoir de Nathan.

6.2 Analyse a priori

La justification de la construction proposée permet aux élèves de s'appropriier le problème. Elle peut être rédigée de différentes manières, en utilisant la propriété de Thalès ou le théorème de la droite des milieux qui sont des outils de base de la géométrie de collège.

Cependant, pour les utiliser correctement, les élèves devront être capables d'isoler une figure dans une figure complexe et distinguer propriété directe et réciproque.

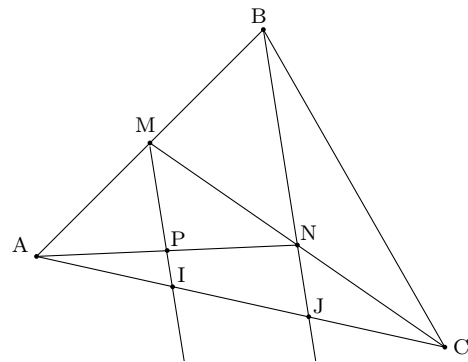
La recherche d'une solution au problème posé à Nathan laisse l'initiative aux élèves. L'analyse de la construction proposée peut les mettre sur une piste de solution sans pour autant les guider ni les obliger à partir dans cette direction et ils peuvent aussi trouver une solution indépendante de la construction précédente.

La justification n'est pas demandée mais pourra être travaillée en classe en prolongement.

6.3 Éléments de solution

- Considérons le triangle ABN .
 M est le milieu de $[AB]$ et P est le milieu de $[AN]$, donc d'après le théorème de la droite des milieux, (MP) est parallèle à (BN) .
- Considérons le triangle ANJ .
 P est le milieu de $[AN]$ et (PI) est parallèle à (NJ) , donc d'après le théorème des milieux, I est le milieu de $[AJ]$
d'où $AI = IJ$.
- Considérons le triangle MCI .
 N est le milieu de $[MC]$ et (MI) est parallèle à (NJ) , donc d'après le théorème des milieux, J est le milieu de $[IC]$
d'où $IJ = JC$.

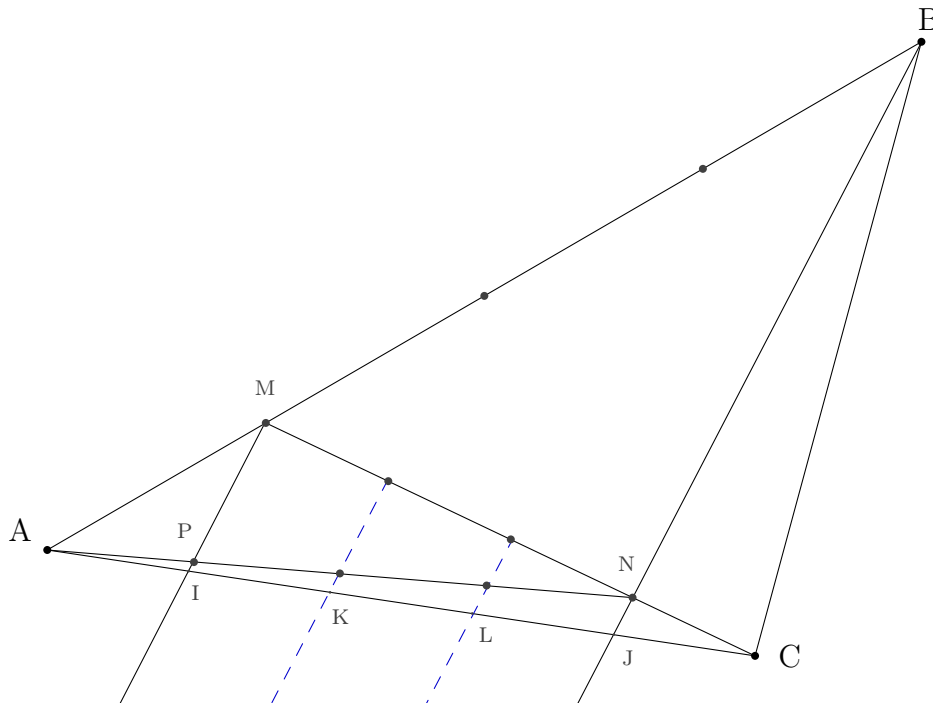
En résumé, $AI = IJ$ et $IJ = JC$



Les points I et J partagent donc bien le côté $[AC]$ en trois segments de même longueur.

Pour répondre au problème de Nathan, on peut imaginer une solution inspirée de la construction proposée.

6.3.1 Solution 1, inspirée de la construction proposée.



Construire au compas :

- le point M du segment $[AB]$ tel que $AM = \frac{1}{4}AB$.
- le point N du segment $[CM]$ tel que $CN = \frac{1}{4}CM$.
- le point P du segment $[AN]$ tel que $AP = \frac{1}{4}AN$.

Les droites (MP) et (BN) coupent le segment $[AC]$ respectivement en I et en J.

Construire au compas les points K et L du segment $[IJ]$ tels que $AI = IK$ et $CJ = JL$.

Le côté $[AC]$ est alors partagé en cinq segments de même longueur.

Justification :

Par construction, $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AN} = \frac{1}{4}$

En appliquant la réciproque de la propriété de Thalès au triangle ABN , (MP) est parallèle à (BN) .

En appliquant la propriété de Thalès dans le triangle ABJ , $\frac{AM}{AB} = \frac{AI}{AJ} = \frac{1}{4}$

donc $AI = \frac{1}{4}AJ$ et $IJ = \frac{3}{4}AJ = 3 AI$.

En appliquant la propriété de Thalès dans le triangle IMC , $\frac{CN}{CM} = \frac{CJ}{CI} = \frac{1}{4}$

donc $CJ = \frac{1}{4}CI$ et $IJ = \frac{3}{4}CI = 3 CJ$.

Par conséquent, $AI = CJ = \frac{1}{3}IJ$.

Par construction, les points K et L du segment $[IJ]$ sont tels que $AI = IK$ et $CJ = JL$

donc $IK = KL = LJ = \frac{1}{3}IJ$.

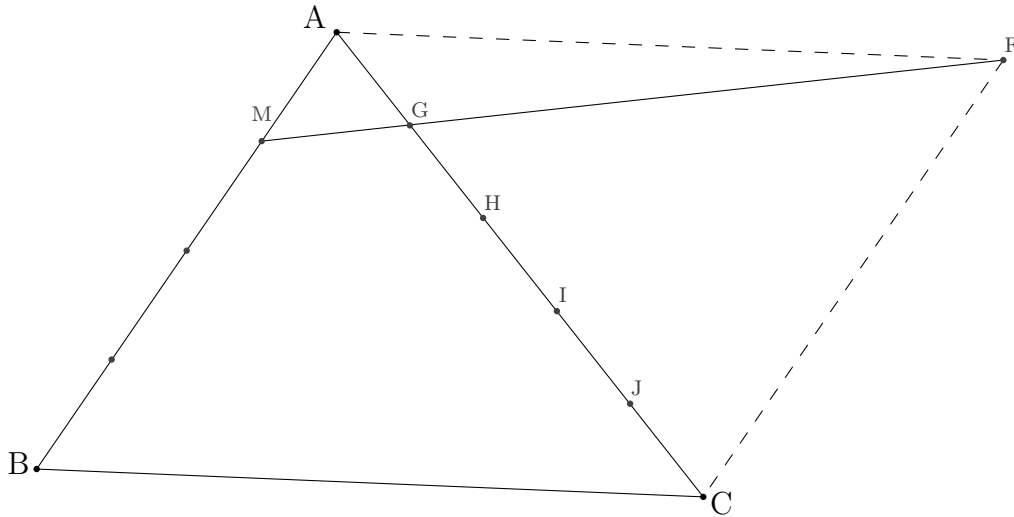
Les points I, J, L et K partagent donc bien le côté $[AC]$ en cinq segments de même longueur.

Remarque :

On peut aussi utiliser les points de la subdivision des segments $[MN]$ et $[PN]$ pour tracer des parallèles à la droite (MP) et partager le segment $[IJ]$ en trois segments de longueur égale à celle du segment $[AI]$.

6.3.2 Solution 2, indépendante de la construction proposée

Rappel : $[AB]$ étant partagé en 4 segments de même longueur, en déduire un partage de $[AC]$ en 5 segments de même longueur.



- Construire au compas le point M du segment $[AB]$ tel que $AM = \frac{1}{4}AB$.
- Construire le point F tel que ABCF soit un parallélogramme.
Le segment $[MF]$ coupe $[AC]$ en G.
- Construire au compas les points H, I, et J du segment $[GC]$ tels que $GA = GH = HI = IJ$.
Le côté $[AC]$ est alors partagé en cinq segments de même longueur.

Justification :

ABCF étant un parallélogramme, les droites (AM) et (CF) sont parallèles et on peut déduire de la propriété de Thalès appliquée aux triangles GAM et GCF que $\frac{AM}{CF} = \frac{GA}{GC}$.

De plus $CF = AB$ donc $\frac{AM}{CF} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ et par suite, $\frac{GA}{GC} = \frac{1}{4}$.

G est donc tel que $GC = 4GA$ ou encore $AG = \frac{1}{5}AC$.

Par construction, les points H, I et J du segment $[GC]$ sont tels que $GA = GH = HI = IJ = \frac{1}{5}AC$ et par suite $JC = \frac{1}{5}AC$.

Le segment $[AC]$ est donc bien partagé en cinq segments de même longueur.

7 La carte de crédit

7.1 Le sujet

Mamy a offert une journée à Londres à ses trois petites-filles Emilie, Julie et Mélanie. Elle leur a fourni les trois billets de train.

Elle a également confié sa carte de crédit à l'aînée Emilie. Pour éviter les disputes et partager les responsabilités, c'est à Julie et Mélanie qu'elle a confié le code à 4 chiffres de la carte de crédit.

Mamy a donné les indications suivantes à Julie et Mélanie :

- Julie sait que si on divise le nombre à 4 chiffres par 11 ou 13, on obtient, dans les deux cas, un reste de 2.
- Mélanie sait que si on divise le nombre à 4 chiffres par 9 ou 17, on obtient, dans les deux cas, un reste de 1.

Aidez Julie et Mélanie à déterminer le code. Expliquez votre démarche.

7.2 Analyse a priori

Un élève de troisième ou seconde doit avoir bien assimilé la notion de division euclidienne. Il doit traduire la phrase « la division de N , le nombre cherché, par 11 a pour reste 2 » par $N = 11k + 2$. Si cette étape est franchie, les tâches de calcul seront réalisées par le tableur (le mode tableau de la calculatrice ne donnera pas une vue suffisamment large).

L'observation des coïncidences permettra de conclure.

Un encadrement des entiers k et k' permettra de limiter cette tâche fastidieuse.

Le passage à « $N - 2$ multiple commun à 11 et 13 » est beaucoup plus délicat pour un élève de 3^e ou 2^e.

Les déductions « $N - 2$ multiple de 143 », puis « N de la forme $143x + 2$ » semblent intuitivement plus simples.

7.3 Éléments de solution

Soit N le nombre cherché.

L'indication donnée à Julie implique que $N - 2$ est multiple commun à 11 et 13. On en déduit que $N - 2$ est multiple de 143 (11 et 13 étant premiers entre eux).

N s'écrit sous la forme $143k + 2$ avec k entier naturel.

L'indication donnée à Mélanie implique que $N - 1$ est multiple commun à 9 et 17. On en déduit que $N - 1$ est multiple de 153 (9 et 17 étant premiers entre eux).

N s'écrit sous la forme $153k' + 1$ avec k' entier naturel.

On peut remarquer que N ayant 4 chiffres, k est compris entre 7 et 69 et k' est compris entre 7 et 65.

L'utilisation d'un tableur permet de déterminer le code cherché : **6580**.

Utilisation de niveau 2 : faire apparaître les entiers du type $143x + 2$ et les entiers du type $153x + 1$ dans deux colonnes voisines.

Rechercher les coïncidences en observant ou en utilisant une mise en forme conditionnelle recensant les valeurs en double.

	A	B	C	D
1	x	$143x + 2$	$153x + 1$	
2	1	145	154	
3	2	288	307	
4	3	431	460	
5	4	574	613	
6	5	717	766	
...	
43	42	6008	6427	
44	43	6151	6580	
45	44	6294	6733	
46	45	6437	6886	
47	46	6580	7039	
48	47	6723	7192	

Utilisation de niveau 1 : faire apparaître les entiers du type $11x + 2$, $13x + 2$, $9x + 1$, $17x + 1$ dans quatre colonnes voisines.

Rechercher les coïncidences en observant ou en utilisant une mise en forme conditionnelle recensant les valeurs en double (pour les deux premières colonnes, puis pour les deux autres).

Une solution experte (uniquement en Terminale S spécialité) consiste à résoudre en nombres entiers l'équation $153k' - 143k = 1$ et de déterminer l'unique couple solution d'entiers compris entre 7 et 70 ; il s'agit de (46 ; 43).

8 Top 14

8.1 Le sujet

Xavier, professeur de mathématiques, est aussi entraîneur du club de rugby de son village.

Dans la soirée, le journaliste local qui n'a pas assisté au match lui téléphone pour connaître le score de la rencontre.

Xavier, encore contrarié par la défaite de son équipe, lui fait la réponse suivante :

« Nous avons ouvert le score par une pénalité à 3 points, mais à la fin du match, nous étions menés et la différence des carrés des points des deux équipes valait exactement 60 ».

Le lendemain matin, Xavier découvre le score exact dans le journal. Il rappelle alors le journaliste en lui demandant d'excuser son manque de fair-play de la veille et en le félicitant pour ses compétences mathématiques.

Quel était le résultat de ce match ? Expliquez votre démarche.

8.2 Analyse a priori

Cet exercice n'est pas très difficile.

Les élèves peuvent résoudre l'exercice en reconnaissant une identité remarquable. Mais son utilisation n'est pas classique dans la mesure où il faudra l'utiliser pour résoudre une équation portant sur des nombres entiers. En factorisant, le problème se ramène à la recherche des diviseurs de 60.

Un raisonnement par disjonction des cas permet alors de résoudre rapidement le problème.

Il est possible que des élèves ayant utilisé les diviseurs de 60 proposent la bonne réponse sans vérifier qu'elle est unique, mais seul un raisonnement par disjonction des cas permet de prouver l'unicité.

Les élèves peuvent aussi éviter le recours à l’algèbre et à l’arithmétique en dressant la liste des carrés des entiers pour repérer ceux qui donnent une différence égale à 60.

Les scores étant de 14 et 16, on peut imaginer qu’ils puissent les remarquer rapidement, mais justifier l’unicité du résultat oblige à tester toutes les autres différences.

Ils peuvent aussi dresser un tableau de valeurs de la fonction $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{60 + x^2}$ pour les entiers x tels que $x \geq 3$, en se limitant à un score « raisonnable » et en extraire les entiers ayant une image entière.

8.3 Éléments de solution

Soit a le score de l’équipe de Xavier et b celui de l’équipe adverse.

$3 \leq a < b$ et $b^2 - a^2 = 60$.

a et b sont deux entiers tels que $(b + a)(b - a) = 60$.

Il suffit alors de lister les diviseurs de 60 et d’éliminer ceux qui sont en contradiction avec l’énoncé.

- Soit en remarquant que $(b + a) + (b - a) = 2b$ est un entier pair et $a \geq 3$, comme récapitulé dans le tableau ci-dessous.

$b + a$	$b - a$	$2b$	Résultats et commentaires
60	1	61	impossible car $2b$ est impair
30	2	32	$b = 16$ et $a = 14$
20	3	23	impossible
15	4	19	impossible
12	5	17	impossible
10	6	16	$b = 8$ et $a = 2$ impossible car le score est au moins égal à 3.

- Soit en résolvant les systèmes $\begin{cases} a + b = s \\ a - b = d \end{cases}$

avec $(s, d) \in \{(60, 1); (3, 2); (20, 3); (15, 4); (12, 5); (10, 6)\}$

Le score est de 14 points pour l’équipe locale contre 16 points pour l’équipe adverse.

9 Le bouchon

9.1 Le sujet

A l’approche du tunnel du Gothard, les voitures sont à l’arrêt dans un bouchon. Marina remarque que son voisin de palier, Pedro, se trouve dans la file de gauche juste à son niveau. Il leur reste exactement 12 km à faire avant l’entrée du tunnel.

Ils se saluent rapidement et les deux files redémarrent.

Marina roule sur la file de droite à 40 km/h pendant 6 minutes puis s’arrête 3 minutes et continue en roulant à 40km/h pendant 6 minutes puis s’arrête 3 minutes et ainsi de suite jusqu’à l’entrée du tunnel.

Pedro roule sur la file de gauche à 60 km/h pendant 3 minutes puis s’arrête 5 minutes et continue en roulant à 60 km/h pendant 3 minutes puis s’arrête 5 minutes et ainsi de suite jusqu’à l’entrée du tunnel.

Prenant leur mal en patience, ils ne cherchent pas à changer de file.

Combien de fois vont-ils se trouver au même niveau dans ce bouchon et lequel arrivera le premier à l’entrée du tunnel ? Expliquez votre démarche.

9.2 Analyse a priori

Ce problème classique met en œuvre deux solides en mouvement sur une trajectoire assimilée à une droite. Les solides se déplacent à vitesse constante avant de s'arrêter pendant une durée fixée. N'ayant pas la même vitesse lorsqu'ils sont en déplacement et ne s'arrêtant pas aussi longtemps chacun, nous nous demandons si ces solides peuvent se rencontrer de nouveau. Si la notion de vitesse fait appel à la notion de proportionnalité, les élèves se heurtent vite à la difficulté de gérer les arrêts.

Il n'est pas juste question de déterminer une position en fonction du temps ou un moment t en fonction d'une position pour un véhicule donné, il faut comparer ces données pour deux véhicules afin d'en connaître des positions communes. Les élèves seront donc amenés à explorer différentes représentations du problème : tableau de valeurs ou représentations graphiques. Comme l'indique l'expression « en fonction de » répétée ci-dessus, l'exercice met en œuvre la notion de fonction et en particulier de fonction affine par morceaux. On insistera sur la définition d'une fonction en mathématiques et sur le caractère unique de l'image d'un nombre pris dans l'ensemble de définition.

La question peut donc s'adresser à un élève de troisième ou de seconde.

9.3 Éléments de solution

On appelle V1 le véhicule de Marina et V2 le véhicule de Pedro.

Il peut y avoir deux manières de positionner un solide :

- à quel moment t en minutes, le solide se trouve-t-il à une distance donnée x du point de départ ? (t en fonction de x)
- à quelle distance d se trouve le solide à un certain moment donné t ? (d en fonction de t)

Les élèves pourraient être amenés à dresser un schéma de type tableau de valeurs (*) :

V1

Distance parcourue depuis le départ	4 km		8 km		12 km
Combien de minutes se sont écoulées à cet endroit du parcours	6 min	3 min	15 min	3 min	24 min
	(mouvement)	(arrêt)	(9min + 6min)	(arrêt)	(18min + 6min)
	9 min		18 min		24 min

En effet, le véhicule V1 roule à 40 km/h pendant 6 minutes et s'arrête 3 minutes, donc il parcourt 4 km en 6 minutes puis 0 km pendant 3 minutes. Ainsi il parcourt 4 km en 9 minutes et comme il a 12 km à parcourir pour atteindre le tunnel, il lui faudra 2×9 minutes pour parcourir les 8 premiers km et 6 minutes supplémentaires pour parcourir les 4 km restants soit 24 minutes en tout.

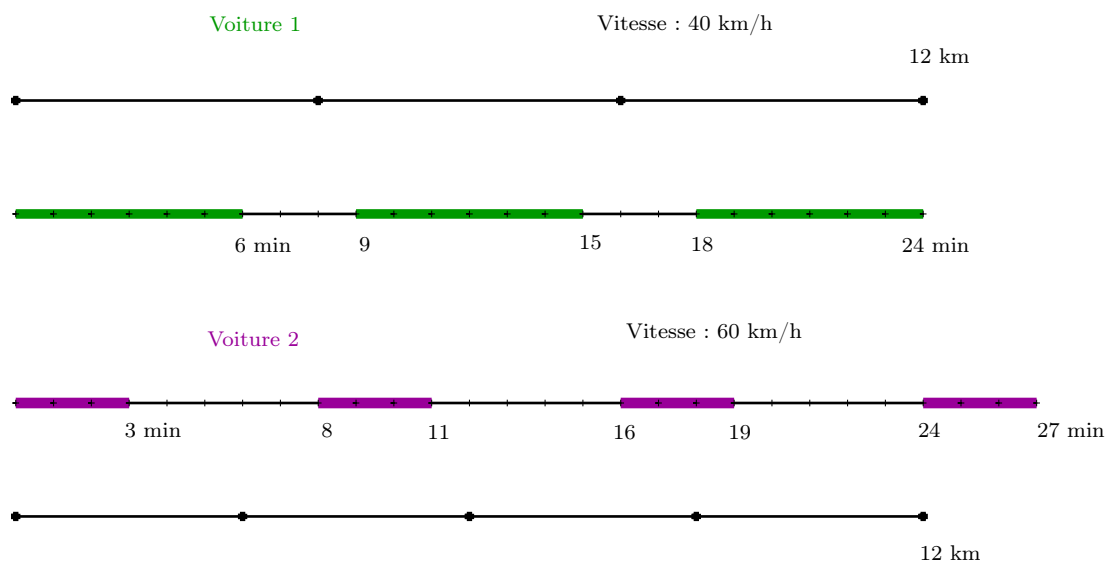
De même, pour le véhicule 2 on peut dresser un tableau semblable :

Distance parcourue depuis le départ	3km		6 km		9 km		12 km
Combien de minutes se sont écoulées à cet endroit du parcours	3 min	5 min	11 min	5 min	19 min	5 min	27 min
	(mouv)	(arrêt)	(mouv)	(arrêt)	(mouv)	(arrêt)	(mouv)
	8 min		16 min		24 min		27 min

On observe donc que le véhicule 1 arrive avant le véhicule 2 à l'entrée du tunnel. On répond ainsi à une partie de la question !

Il n'est pas du tout aisé de déterminer les moments où les positions sont identiques car les tableaux ci-dessus ne le permettent pas. Croiser les informations de ces deux tableaux peut constituer un obstacle.

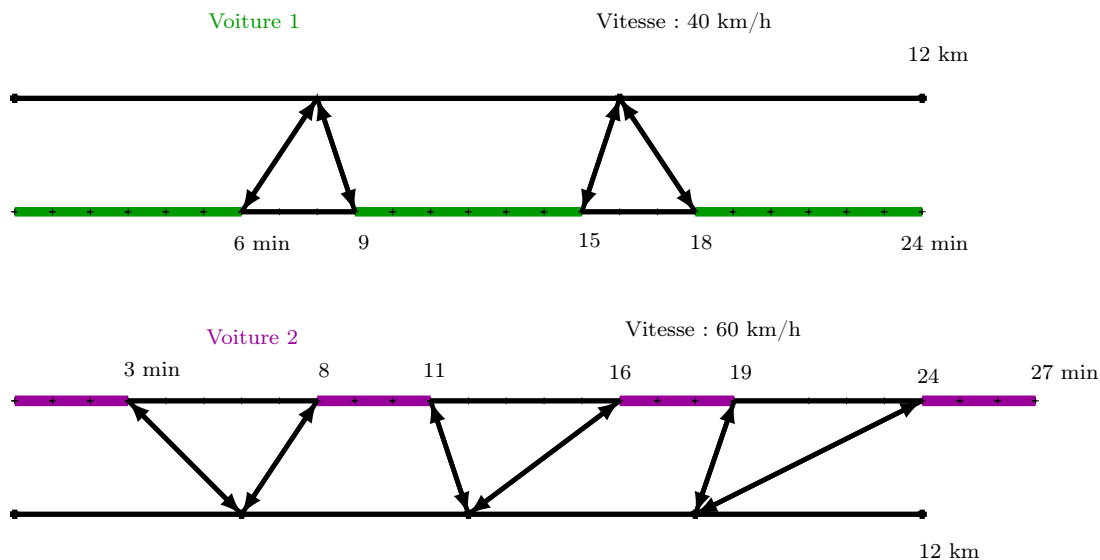
Les élèves pourraient alors mettre « en parallèle » les trajets des deux véhicules ainsi que le temps :



On observe sur le dessin ci-dessus que les véhicules ont peu de chance de se croiser lorsqu'ils sont à l'arrêt sauf si leur position est la même.

Une lecture laborieuse du schéma fait apparaître que les véhicules ne peuvent pas se croiser entre la 6^e et la 8^e minute de trajet car la voiture V1 est à 4 km tandis que V2 est à 3 km.

De même, elles ne peuvent pas se trouver au même niveau entre la 15^e et la 16^e minute. Mais, on ne cherche pas à savoir quand les voitures ne peuvent pas se croiser mais si elles le peuvent et combien de fois.



Sur la figure ci-dessus on lit qu'à x km du point de départ, on peut associer plusieurs instants t . La grandeur t n'est pas une fonction de x au sens mathématique du terme.

Solution 1 : Un tableau permettrait cependant de croiser les informations ci-dessus :

t en minutes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kilomètres parcourus par V1	0,67	1,33	2	2,67	3,33	4	4	4	4	4,67
kilomètres parcourus par V2	1	2	3	3	3	3	3	3	4	5

t en minutes	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
kilomètres parcourus par V1	5,33	6	6,67	7,33	8	8	8	8	8,67	9,33
kilomètres parcourus par V2	6	6	6	6	6	6	7	8	9	9

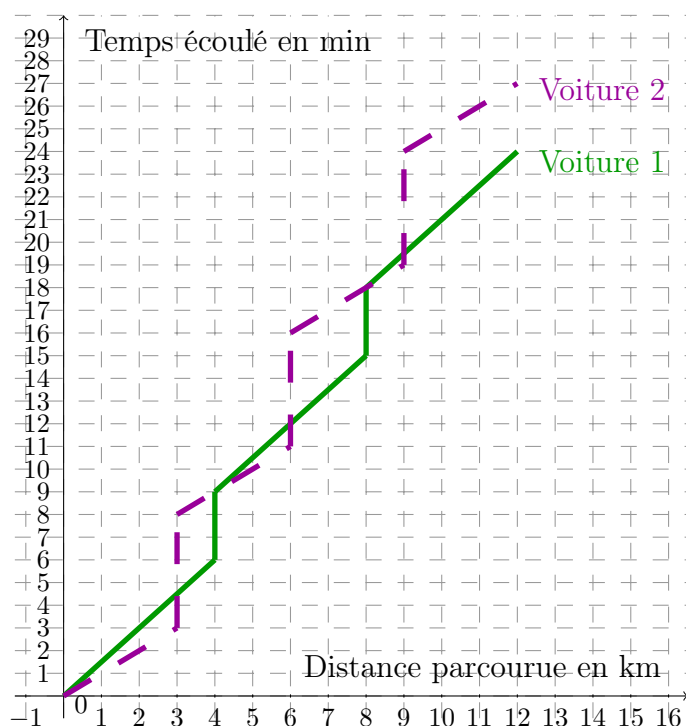
t en minutes	21	22	23	24	25	26	27
kilomètres parcourus par V1	10	10,67	11,33	12			
kilomètres parcourus par V2	9	9	9	9	10	11	12

Le tableau ci-dessus indique le véhicule qui se trouve en avance sur l'autre à chaque minute. Jusqu'à la 4^e minute, V2 est devant V1. V1 double V2 entre la 4^e et la 5^e minute et se trouve devant V2 jusqu'à la 9^e minute. V1 et V2 se trouvent au même niveau dans le bouchon à cette 9^e minute, etc. ...

On compte ainsi 5 occasions au cours desquelles V1 et V2 sont au même niveau dans le bouchon.

Les élèves peuvent aussi réaliser un graphique à partir des tableaux (*) donnant :

- Soit le temps écoulé en fonction de la distance parcourue : **Solution 2**

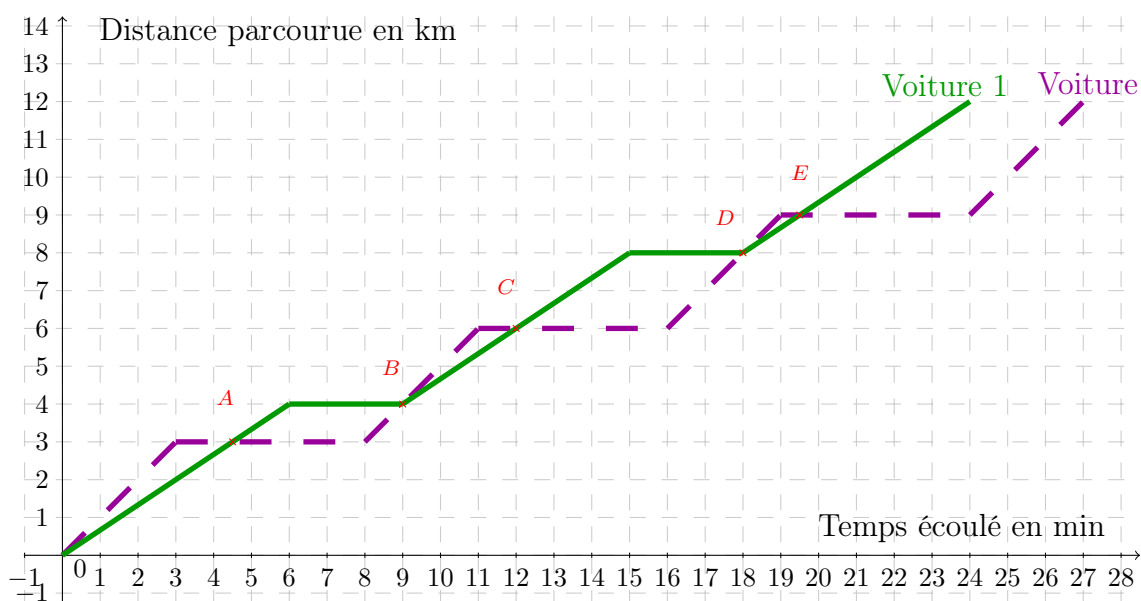


Sur le graphique ci-contre, on lit que les deux véhicules se trouvent ensemble :

- à 3 km du départ lorsque 4min 30s se sont écoulées,
- à 4 km du départ quand 9 minutes se sont écoulées,
- à 6 km du départ,
- à 8 km du départ,
- et à 9 km du départ.

Les deux véhicules se sont donc trouvés 5 fois au même niveau.

- Soit la distance parcourue en fonction du temps écoulé : **Solution 3**



Sur le graphique ci-dessus, on lit que les deux véhicules se trouvent ensemble :

- entre la 4^e et la 5^e minute du parcours,
- à la 9^e minute
- à la 12^e minute,
- à la 18^e minute
- et entre la 19^e et la 20^e minute du parcours

Les deux véhicules se sont donc trouvés 5 fois au même niveau.

En prolongement, les élèves pourraient déterminer la position d (en km) en fonction du temps et définir ainsi une fonction affine définie par morceaux.

La distance parcourue par le véhicule V1 en fonction du temps est donnée par la fonction affine par morceaux suivante :

(on rappelle que V1 se déplace à 40 km/h soit 40 km en 60 minutes)

- Si $0 \leq t \leq 6$ alors $D_1(t) = \frac{40}{60} \times t = \frac{2}{3}t$
- Si $6 \leq t \leq 9$ alors $D_1(t) = \frac{2}{3} \times 6 = 4$
- Si $9 \leq t \leq 15$ alors $D_1(t) = \frac{2}{3}t + b$ avec $b = D_1(9) - \frac{2}{3} \times 9 = -2$, donc $D_1(t) = \frac{2}{3}t - 2$
- Si $15 \leq t \leq 18$ alors $D_1(t) = D_1(15) = 8$
- Si $18 \leq t \leq 24$ alors $D_1(t) = \frac{2}{3}t + b$ avec $b = D_1(18) - \frac{2}{3} \times 18 = -4$, donc $D_1(t) = \frac{2}{3}t - 4$

La distance parcourue par le véhicule V2 en fonction du temps est donnée par la fonction affine par morceaux suivante :

- Si $0 \leq t \leq 3$ alors $D_2(t) = \frac{60}{60} \times t = t$
- Si $3 \leq t \leq 8$ alors $D_2(t) = 3$
- Si $8 \leq t \leq 11$ alors $D_2(t) = t + b$ avec $b = D_2(8) - 8 = 3 - 8 = -5$, donc $D_2(t) = t - 5$
- Si $11 \leq t \leq 16$ alors $D_2(t) = D_2(11) = 6$
- Si $16 \leq t \leq 19$ alors $D_2(t) = t + b$ avec $b = D_2(16) - 16 = 6 - 16 = -10$, donc $D_2(t) = t - 10$
- Si $19 \leq t \leq 24$ alors $D_2(t) = D_2(19) = 9$
- Si $24 \leq t \leq 27$ alors $D_2(t) = t + b$ avec $b = D_2(24) - 24 = 9 - 24 = -15$, donc $D_2(t) = t - 15$

On peut désormais résoudre $D_1(t) = D_2(t)$ successivement sur les intervalles $[0 ; 3]$; $[3 ; 6]$; $[6 ; 8]$; $[8 ; 9]$; $[9 ; 11]$; $[11 ; 15]$; $[15 ; 16]$; $[16 ; 18]$; $[18 ; 19]$; $[19 ; 24]$ en utilisant les expressions de $D_1(t)$ et $D_2(t)$ adaptées.

En conclusion, les véhicules se trouveront 5 fois au même niveau et c'est le véhicule V1 qui arrive en tête à l'entrée du tunnel.